Tekil nokta civarında (5.1) dif. denkleminin çözümü çoğunlukla analitik olmadığından daha önce kullandığımız yöntemi burada kullanamayız. Bunun yerine daha genel seri açılımı kullanmalıyız.

Bir dif. denklemin genellikle tekil noktaları az sayıda olduğundan, bu noktaları görmezden gelebiliriz. Fakat özellikle fiziksel olaylarda tekil nokta civarında çözüm, önemli rol oynadığından bu noktalarda çözümün incelenmesi daha da önem taşır.

Eğer tekil nokta komşuluğunda (civarında) Q/p ve R/p'nin davranışı hakkında daha ayrıntılı bilgi verilmezse (5.1) denkleminin çözümünün karekterini belirlemek olanaksızdır. Yani iki lineer bağımsız çözüm $x\to x_0$'da, sınırsız veya sınırlı, veya biri sınırlı biri sınırsız olabilir

Örnek: $x^2y''-2y=0$ denklemi $x=0$'da tekil noktaya sahiptir ve $y_1=x^2$, $y_2=\frac{1}{x}$, $x>0$ ve $x<0$ için lineer bağımsız iki çözümdür. Orjini içermeyen herhangi bir aralıkta genel çözüm $c_1x^2+c_2x^{-1}$ dir. $q(x)=-\frac{2}{x^2}$ $x=0$'da analitik değildir. $x\to 0$ y_1 sınırlı, y_2 sınırsızdır. $y_2=x^{-1}$ $x=0$'da analitik değildir. yani Taylor serisine açılamaz.

Örnek: $x^2y''-2xy'+2y=0$ dif. denkleni $x=0$'da tekil noktaya sahiptir ve $y_1=x^2$, $y_2=x$ lineer bağımsız iki çözümdür. $p(x)=\frac{-2}{x}$ ve $q(x)=\frac{2}{x^2}$ $x=0$'da analitik olmamasına karşın iki çözümde $x=0$'da analitiktir.

Tekil nokta civarında çözüm yapılabilmesi için Q/p ve R/p fonksiyonlarına şart koyarak tekil nokta tanımını

zayıflatmamız gerekir.

P, Q, R polinomlar olmak üzere

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}$$

ve

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$$

sonlu ise x_0 noktasına (5.1) denkleminin düzgün tekil noktası denir. Daha genel olarak P, Q, R fonksiyonlar ise

$$(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{ve} \quad (x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$$

$x=x_0$'da analitik ise x_0'a (5.1) denkleminin düzgün tekil noktası denir. Aksi durumda düzgün olmayan tekil nokta denir.

Örnekler 1) $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$ Legendre dif. denkleminin ± 1 tekil noktası olduğunu biliyoruz.

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{Q(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{-2x}{(1-x)(1+x)}=1$$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{R(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{(1-x)(1+x)}=0$$

olduğundan $x=1$ düzgün tekil noktadır.

$$\lim_{x\to -1}(x+1)\frac{Q(x)}{P(x)}=1$$

$$\lim_{x\to -1}(x+1)^2\frac{R(x)}{P(x)}=0$$

olduğundan $x=-1$ düzgün tekil noktadır.

2) $(1-x^2)^2y''+x(1-x)y'+(1+x)y=0$ dif. denkleminin tekil ve düzgün tekil noktalarını bulunuz.

$$p(x) = (1-x^2)^2 \qquad Q(x) = x(1-x) \qquad R(x) = 1+x$$

$p(x)=0 \Rightarrow x = \pm 1$ tekil noktalar.

$x=1$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{Q(x)}{p(x)} = \lim_{x\to 1}(x-1)\frac{x(1-x)}{(1-x)^2(1+x)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{R(x)}{p(x)} = \lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{1+x}{(1-x)^2(1+x)^2} = \frac{1}{2}$$

olduğundan $x=1$ düzgün tekil noktadır.

$x=-1$

$$\lim_{x\to -1}(x+1)\frac{Q(x)}{p(x)} = \lim_{x\to -1}(x+1)\frac{x(1-x)}{(1-x)^2(1+x)^2} = \infty$$

olduğundan $x=-1$ düzgün tekil nokta değildir.

3) $\sin x\, y'' + xy' + 4y = 0$ tekil ve düzgün tekil noktalarını inceleyiniz.

$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{x}{\sin x}$ (x heryerde sürekli, $\sin x$ 〃 〃) $\sin x \neq 0$ sürekli

$\sin x = 0 \Rightarrow x=0,\ x=\pm n\pi$, n doğal sayı tekil noktalar.

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \cdots$$

$$x\cdot p(x) = x\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{x^2}{\sin x} = x\left[1+\frac{x^2}{6}+\cdots\right]$$ $x=0$'da analitiktir.

$$x^2 q(x) = x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{4x^2}{\sin x}$$

$x p(x)$ ve $x^2 q(x)$ $x=0$ ve $\pm n\pi$ noktalarında analitik olduğundan düzgün tekil noktalardır.

4) $xy'' + e^x y' + 3\cos x\, y = 0$ ($x=0$ düzgün tekil nokta)

$$\left(\begin{array}{l} xp(x) = x\cdot\frac{e^x}{x} = e^x \\ x^2 q(x) = x^2\frac{3\cos x}{x} = x\cos x \end{array} \right)$$

5.5 Euler Denklemleri

Düzgün tekil noktaya sahip en basit dif. denklem α, β reel sabitler olmak üzere

$$L(y) = x^2y'' + \alpha x y' + \beta y = 0 \qquad (5.6)$$

Euler dif. denklemidir. $x=0$ düzgün tekil noktadır. (5.6) denkleminin

$$y = x^r, \quad x>0$$

şeklinde bir çözümünü arayalım. $y' = rx^{r-1}$, $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ denklemde yerine konursa

$$L(x^r) = x^r\left(r(r-1)+\alpha r+\beta\right)$$

elde edilir. Eğer r

$$F(r) = r(r-1)+\alpha r+\beta$$

denkleminin kökü ise $L(x^r)=0$, yani $y=x^r$, (5.6)'nın bir çözümüdür.

Reel ve farklı kökler: Eğer $F(r)=0$ farklı r_1, r_2 reel köke sahipse $y_1 = x^{r_1}$ ve $y_2 = x^{r_2}$, (5.6)'nın çözümleridir. $W(x^{r_1}, x^{r_2}) = (r_2-r_1)x^{r_1+r_2-1} \neq 0$ olduğundan genel çözüm

$$y = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2} \qquad x>0$$

dir.

örnek $2x^2y'' + xy' - y = 0$ $(x>0)$ Euler denk. çöz.

$y = x^r \quad y' = rx^{r-1} \quad y'' = r(r-1)x^{r-2}$

$$2x^2\left(r(r-1)x^{r-2}\right) + x\cdot r\cdot x^{r-1} - x^r = 0$$

$$x^r\left(2r(r-1)+r-1\right) = 0$$

$$F(r) = 2r(r-1)+r-1 = (2r+1)(r-1)$$

$$F(r)=0 \Rightarrow r_1 = -\frac{1}{2},\ r_2 = 1$$

$$y = c_1x^{-1/2} + c_2x \qquad x>0$$

Eşit kökleri: Eğer r_1, r_2 kökleri eşit ile yalnız $y=x^{r_1}$ çözümünü elde ederiz. İkinci çözüm mertebe indirgeme ile bulunabilir. Fakat sonraki amaçlarımız için değişik yöntem düşüneceğiz. $r=r_1$ olduğundan $F(r)=(r-r_1)^2$ dir. Burada yalnız $F(r_1)=0$ değil, aynı zamanda $F'(r_1)=0$ dır. Buna göre

$$\frac{\partial}{\partial r}L(x^r)=\frac{\partial}{\partial r}\left(x^r F(r)\right)$$

olduğundan

$$L(x^r \ln x) = (r-r_1)^2 x^r \ln x + 2(r-r_1)\, x^r$$

dir. $r=r_1$'de sağ taraf sıfır olduğundan

$$y_2(x)=x^{r_1}\ln x \quad x>0$$

olarak bulunur. $W(x^{r_1}, x^{r_1}\ln x) = x^{2r_1-1}\neq 0$ olduğundan

genel çözüm $y=(c_1+c_2\ln x)x^{r_1}$, $x>0$

dir.

Örnek: $x^2y''-xy'+y=0$ $x>0$ dif. denk çözü.

$y=x^r$ çözüm aranırsa

$$F(r)=r(r-1)-r+1=(r-1)^2=0 \Rightarrow r_1=r_2=1$$

olduğundan genel çözüm

$$y=(c_1+c_2\ln x)\,x$$

Kompleks kökler: Eğer $r_1=\lambda+i\mu$ ve $r_2=\lambda-i\mu$ $(\mu\neq 0)$ kompleks eşlenik kökler ise

$$x^{r_1}=x^{\lambda+i\mu}=e^{(\lambda+i\mu)\ln x}=e^{\lambda\ln x}e^{i\mu\ln x}=x^{\lambda}\left[\cos(\mu\ln x)+i\sin(\mu\ln x)\right] \quad x>0$$

elde edilir. Burada reel ve sanal kısımlar (5.6) denkleminin çözümleridir.

$$W\left[x^{\lambda}\cos(\mu\ln x), x^{\lambda}\sin(\mu\ln x)\right]=\mu x^{2\lambda-1}\neq 0$$

olduğundan $x>0$ için genel çözüm

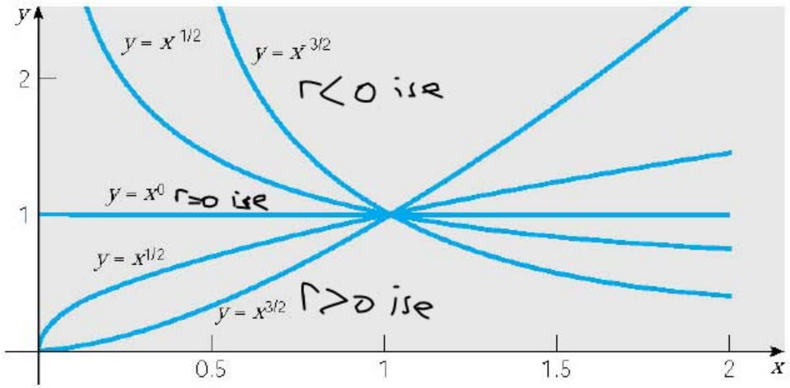
$$y=c_1x^{\lambda}\cos(\mu\ln x)+c_2x^{\lambda}\sin(\mu\ln x) \quad x>0$$

dır.

Kökler reel ve farklı ise Euler denkleminin çözümü

$$y=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2}$$

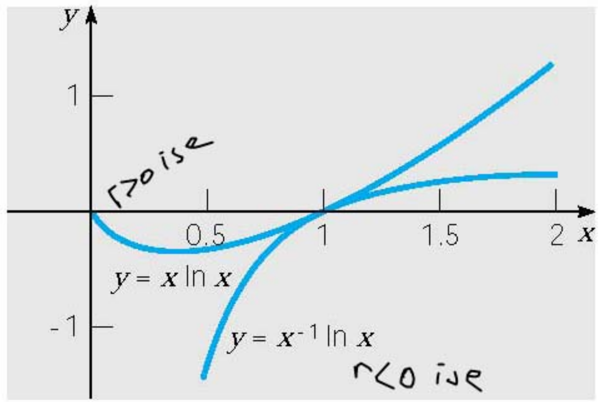
dir.



Kökler reel ve eşit ise Euler denkleminin çözümü

$$y=c_1x^{r}+c_2x^{r}\ln x$$

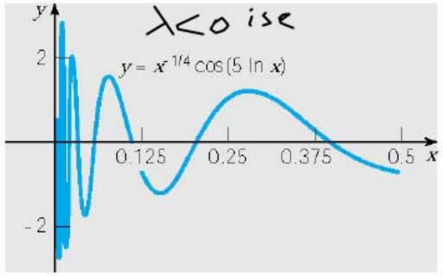
dir.

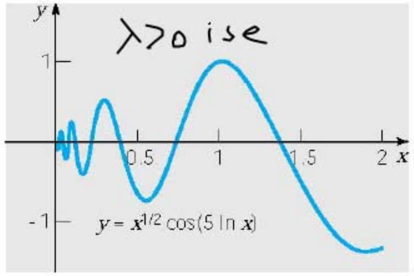


Kökler kompleks ise Euler denkleminin çözümü

$$y=c_1 x^{\lambda}\cos(\mu \ln x)+c_2 x^{\lambda}\sin(\mu \ln x)$$

dir.





Örnek: $x^2y''+3xy'+5y=0$ $(x>0)$ dif. denk. çözünüz.

$y=x^r$ çözüm aranırsa

$$F(r)=r(r-1)+3r+5=r^2+2r+5$$

$$F(r)=0 \Rightarrow r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=-1\pm 2i$$

olduğundan genel çözüm

$$y=c_1x^{-1}\cos(2\ln x)+c_2x^{-1}\sin(2\ln x) \qquad x>0$$

dir.

$x<0$ ise $x=-s$, $s>0$ dönüşümü ile çözüm yapılır. Sonuçta

Teorem: Orjini içermeyen herhangi bir aralıkta

$$x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0$$

Euler denkleminin genel çözümü

$$F(r)=r(r-1)+\alpha r+\beta$$

denkleminin r_1 ve r_2 kökleri tarafından belirlenir. Eğer kökler reel ve farklı ise

$$y=c_1|x|^{r_1}+c_2|x|^{r_2}$$

kökler reel ve eşit ise

$$y=\left(c_1+c_2\ln|x|\right)|x|^{r_1}$$

kökler kompleks eşlenik ise

$$y=|x|^{\lambda}\left[c_1\cos(\mu\ln|x|)+c_2\sin(\mu\ln|x|)\right] \qquad r_{1,2}=\lambda\pm i\mu$$

dir.

$$(x-x_0)^2y''+\alpha(x-x_0)y'+\beta y=0$$

formundaki Euler denkleminin çözümleri $y=(x-x_0)^r$ alınarak yapılır.

Örnek: $(x-2)^2y''+5(x-2)y'+8y=0$ dif. denklemini çözünüz.

$y=(x-2)^r$, $y'=r(x-2)^{r-1}$, $y''=r(r-1)(x-2)^{r-2}$

denklemde yerine konursa

$$(x-2)^r\left[r(r-1)+5r+8\right]=0$$

$$r^2+4r+8=0\Rightarrow r_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-32}}{2}=-2\pm 2i$$

$$y=|x-2|^{-2}\left(c_1\cos(2\ln|x-2|)+c_2\sin(2\ln|x-2|)\right)$$